

Spin

Spin is bekend van het gedrag van een tolletje. Maar het begrip spin is beroemd geworden als een speciale eigenschap van elektronen. Elektronen en nog andere hele kleine deeltjes vertonen een gedrag dat sterk lijkt op dat van een tolletje. Dat gedrag wordt zichtbaar wanneer het deeltje elektrisch geladen is en in een magneetveld geplaatst wordt. Het vindt allerlei toepassingen. Een zeer interessante toepassing is het MRI apparaat. Daar dansen de tolletjes mee met de vibraties van een magneetveld. Past de toonhoogte van de trilling bij de ophanging van het tolletje dan wordt er wat energie uitgewisseld tussen het MRI apparaat en het tolletje. De computers in het MRI apparaat verwerken dit signaal tot een drie dimensionaal beeld dat de artsen benutten om een diagnose te stellen.

Toch geeft de voorstelling van de elektronenspin door een tolletje een verkeerd beeld. Als de natuur reageert op bepaalde aansporingen zoals een vibrerend magneetveld, dan slaat de natuur aan het rekenen en bepaalt op die wijze hoe zij zal reageren. De natuur heeft daarbij de keuze uit allerlei getallenstelsels en zal het best passende getallenstelsel gebruiken.

Naast de natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, ... bestaan er de rationale getallen die ook 0, de negatieve getallen en de breuken omvatten. De reële getallen omvatten alle getallen die oneindig dicht benaderd kunnen worden door er een rij rationale getallen steeds dichter naar toe te laten lopen. Het getal pi, waarmee de omtrek van een cirkel berekend kan worden, is een voorbeeld van een reëel getal, maar het is geen rationeel getal. Er bestaan evenveel rationale getallen als er natuurlijke getallen zijn. Je kunt elk rationeel getal een nummertje geven. Er bestaan veel meer reële getallen dan rationale getallen. De reële getallen passen vloeiend op een oneindig lange rechte lijn. De complexe getallen ontstaan uit de reële getallen door het worteltrekken uit negatieve reële getallen mogelijk te maken. De complexe getallen passen op een twee dimensionaal plat vlak. Een as bevat het reële deel en een as loodrecht daarop bevat het imaginaire deel van het complexe getal. De assen kruisen bij nul. De wortels uit negatieve reële getallen liggen op de imaginaire as.

Er bestaat geen getallenstelsel dat drie dimensies omvat en waarmee optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen mogelijk is. Er bestaat wel een vierdimensionaal getallenstelsel waarmee dit kan. De quaternionen hebben een reële as en drie imaginaire assen. Je kunt de getallen dus zien als een samenstel van een reëel getal en een drie dimensionale pijl. Optellen en aftrekken gaat op eendere wijze als bij complexe getallen. Vermenigvuldigen gaat ingewikkelder. Het product van twee drie dimensionale pijlen levert zowel een reëel getal als een drie dimensionale pijl op en de resulterende drie dimensionale pijl staat loodrecht op de drie dimensionale pijlen van de factoren. Als de volgorde van de factoren verwisselt, dan verandert ook de richting van de resulterende drie dimensionale pijl. Er zijn eigenlijk twee vermenigvuldigingsregels want er is keuze tussen een rechtsdraaiend en een linksdraaiend pijlproduct. Deze keuze is nu precies de bron van de spin. Als de natuur besluit om met quaternionen te rekenen dan kan zij kiezen tussen een rechtsdraaiend en een linkdraaiend pijlproduct. Het lijkt dan alsof er

een tolletje rechtsom of linksom draait. Alleen er is helemaal geen tolletje. Er is alleen een rekenwijze met een keuzemogelijkheid. De natuur gebruikt het pijlproduct om de invloed van het magnetische veld uit te rekenen.

Voor quaternionen bestaan twee productregels:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + \underline{\mathbf{c}} = \mathbf{a} * \mathbf{b} = \mathbf{a}_0 * \mathbf{b}_0 + \mathbf{a}_0 * \underline{\mathbf{b}} + \mathbf{b}_0 * \underline{\mathbf{a}} + (\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}) \pm \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{a}_0 * \mathbf{b}_0 + (\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})$$

$$\underline{\mathbf{c}} = \mathbf{a}_0 * \underline{\mathbf{b}} + \mathbf{b}_0 * \underline{\mathbf{a}} \pm \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}$$

Hierbij is \mathbf{a}_0 het eendimensionale reële deel van \mathbf{a} . Het is een reëel getal.

$\underline{\mathbf{a}}$ is het driedimensionale imaginaire deel van \mathbf{a} .

$(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})$ staat bekend als inwendig product. Het is een reëel getal waarvan de grootte afhankelijk is van de lengten van $\underline{\mathbf{a}}$ en $\underline{\mathbf{b}}$ en van de cosinus van hoek tussen de richting van $\underline{\mathbf{a}}$ en de richting van $\underline{\mathbf{b}}$.

$\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}$ staat bekend als uitwendig product van $\underline{\mathbf{a}}$ en $\underline{\mathbf{b}}$. $\underline{\mathbf{c}}$ staat loodrecht op $\underline{\mathbf{a}}$ en loodrecht op $\underline{\mathbf{b}}$. Er geldt: $\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} = -\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{a}}$. De lengte van $\underline{\mathbf{c}}$ is afhankelijk van de lengten van $\underline{\mathbf{a}}$ en $\underline{\mathbf{b}}$ en van de sinus van de hoek tussen de richting van $\underline{\mathbf{a}}$ en de richting van $\underline{\mathbf{b}}$.

De tekenkeuze \pm bij het uitwendige product is de oorzaak van het bestaan van de eigenschap 'spin' van kleine deeltjes

De quaternionen laten trouwens duidelijk zien waarom onze leefwereld vierdimensionaal is. De reële as komt overeen met de tijdsas en de driedimensionale imaginaire ruimte komt overeen met de plaatsruimte die wij ervaren.

Men kan zich afvragen waarom de natuurkundigen niet ook met quaternionen rekenen. Er zijn natuurkundigen die dat wel degelijk doen. Omdat men voortdurend rekening moet houden met de volgorde van vermenigvuldigingsfactoren is die werkwijze erg gecompliceerd. Het resultaat kan ook bereikt worden door met complexe getallen te rekenen en elk van de vier dimensies apart te behandelen. Het nadeel is dan wel dat spin als een vreemd verschijnsel tevoorschijn komt. Zo zelfs dat veel natuurkundigen zich niet eens meer realiseren dat spin een gevolg is van een rekenregelkeuze.