Versie: 26 april 2016

Het Hilbertboekmodel

Samenvatting

Dit artikel beschrijft een eenvoudig model van de natuurkunde dat strikt gebaseerd is op de logica die de natuur beheerst. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de congruentie van deze logica met een wiskundige constructie die meer dan een eeuw eerder door David Hilbert ontdekt is. Het Hilbertboekmodel breidt deze constructie uit zodat ook velden en dynamiek in het uitgebreide model passen.

Inleiding

Telkens als ik een artikel lees over de verschijnselen, welke ver van ons vandaan in het heelal optreden, ben ik verbaasd over de aandacht die dit Verweggistan krijgt in vergelijking met de verschijnselen in de wereld van het allerkleinste. Alles wat in dit gebied gebeurt wordt meestal afgedaan met verzamelnamen zoals “kwantummechanica” en “veldentheorie”. Zelden of nooit wordt er dieper op ingegaan. In deze sub-nano-wereld zijn dan ook geen spectaculaire plaatjes beschikbaar, zoals deze in verhalen over de kosmos verschijnen.

Wat er speelt

Toch is dit deel van onze omgeving minstens even interessant en mysterieus als de kosmos. Wat het nog interessanter maakt is dat de fundamenten van de natuurkunde grotendeels in dit gebied gevonden kunnen worden. Dit terwijl steeds meer blijkt dat we eigenlijk maar weinig weten van deze fundamenten. Onze kennis daarover bevat nog flink wat lacunes.

Kwantumtheorie

De kwantummechanica en de bijbehorende kwantumveldentheorie zijn voornamelijk in het begin van de vorige eeuw ontwikkeld. De ontwikkeling van deze theorieën is tamelijk stormachtig verlopen en in veel gevallen was men al blij met een beperkt inzicht dat toch voldoende bruikbare formules opleverde zodat men de kwantumverschijnselen kon analyseren en er toepassingen mee kon construeren.

Geschiedenis

In de eerste dagen van de kwantummechanica werd uitgegaan van bewegingsvergelijkingen van de klassieke mechanica. Deze werden dan via een intuïtief proces gekwantificeerd. In de benadering van Schrödinger wordt daarbij de tijdsafhankelijkheid in de toestandsfunctie van het deeltje geplaatst. De operatoren die op de toestandsfuncties inwerken blijven daarbij tijdsonafhankelijk. De benadering van Heisenberg positioneert de tijdsafhankelijkheid in de operatoren die op de statische toestandsfunctie inwerken. Uiteindelijk maakt dit voor de eigenschappen van de natuurkundige deeltjes geen verschil. Dat betekent dat de toestandsfunctie en de operatoren slechts een achtergrondrol spelen. De eigenschappen van de deeltjes treden in de voorgrond. Het betekent ook dat tijd niet tot de eigenschappen van een deeltje behoort. Tijd speelt in de toestandsfunctie of in de operatoren de rol van een parameter. Het is een parameter die de voortgang van de dynamiek kenmerkt. Het maakt kennelijk niet uit waar je deze rol plaatst. [1]

De grootste verwarring ontstond toen duidelijk werd dat de kleinste dingen zich zowel als een deeltje en als een pakketje golven kon gedragen. Deze verwarring duurt nog voort omdat dit tevens betekent dat de natuur zich in zijn kleinste onderdelen onvoorspelbaar gedraagt. Velen kunnen of willen deze fundamentele karaktertrek niet aanvaarden.

Verklaring

Toch zijn er al vroeg in de vorige eeuw degelijke verklaringen gegeven. Garrett Birkhoff en John von Neumann toonden aan dat de natuur zich niet houdt aan de wetten van de klassieke logica. In plaats daarvan maakt zij gebruik van een logica waarin ten opzichte van de klassieke logica precies één van de wetten verzwakt is. Dit betreft de modulaire wet. Zoals in alle situaties waarin regels verzwakt worden, leidt dit tot een soort anarchie. In die gebieden waar de natuur afwijkt van de klassieke logica wordt haar samenhang flink wat ingewikkelder. Dat gebied is het terrein van de zeer kleine dingen. Dat gebied is dus feitelijk heel wat fascinerender dan de kosmos. De kosmos houdt zich, zover we weten, netjes aan de klassieke logica. De hier beschreven verzwakte logica wordt in wetenschappelijke kringen met de naam “traditionele kwantumlogica” aangeduid.

[1] De paragraaf over het Hilbertboek vertelt waar de parameter tijd in het model past.

Hilbert model

Birkhoff en von Neumann zijn nog een stap verder gegaan. Zij hebben ontdekt dat er een wiskundige structuur bestaat die in veel opzichten op de structuur van de verzwakte logica lijkt. Het is een ruimte met oneindig veel dimensies die al meer dan een eeuw eerder door de wiskundige David Hilbert ontdekt was. De positie in deze Hilbertruimte kan met getallen weergeven worden. Dat zijn er dan bij elke positie oneindig veel. Gelukkig kan dat wat er in deze *oneindig dimensionale separabele Hilbertruimte* gebeurt ook met functies weergegeven worden. Van functies die daarbij passen was al een heleboel bekend.

Getallen

De getallen die voor de bepaling van de positie in de Hilbertruimte gebruikt kunnen worden hoeven niet beperkt te blijven tot de reële getallen, waarmee we onze eigen driedimensionale leefomgeving opmeten. Constantin Piron heeft gevonden dat deze getallen op zijn minst lid moeten zijn van een zogenaamde delingsring. Er bestaan maar drie bruikbare delingsringen: de reële getallen, de complexe getallen en de quaternionen. Vrijwel niemand kent de quaternionen nog. Ze zijn in de negentiende eeuw door Hamilton ontdekt. Het zijn hypercomplexe getallen met een één-dimensionaal reëel deel en een driedimensionaal imaginair deel.

Hilbert operatoren

Hier zie je meteen een reden voor onze drie dimensionale leefwereld verschijnen. Het levert ook meteen een raadsel op, want de structuur van Einsteins ruimtetijd verschilt van de structuur van de quaternionen[2]. Er zijn echter meer raadsels. De Hilbertruimte heeft weliswaar oneindig veel dimensies, maar deze oneindigheid is aftelbaar. Dit betekent dat in principe aan elke dimensie een labeltje met daarop een oplopend geheel getal gehangen kan worden. De verzameling van de reële getallen is overaftelbaar, dus die zijn als label ongeschikt, maar de verzameling van de rationale getallen is aftelbaar en de verzameling van de rationale quaternionen is dat ook. Dus aan elke dimensie van de Hilbertruimte kan een rationaal quaternion gehangen worden. De dingen die deze relatie kunnen leggen worden door wiskundigen operatoren genoemd. De reële getallen beschrijven een continuüm en de verzameling van de quaternionen doet dat ook. Maar de verzameling van de rationale quaternionen doet dat niet. Dat betekent dat het met het verkregen model niet mogelijk is om er nauwkeurig vloeiende verschijnselen mee te beschrijven. Die vereisen immers een continuüm voor hun beschrijving.

[2] De tijd parameter past dus kennelijk niet als de vierde dimensie in het positie quaternion.

Korreligheid

De werkelijkheid is nog erger. Het lijkt er steeds meer op dat in zijn kleinste vorm de natuur korrelig is. Er bestaan zogenaamde Planckeenheden. Dat zijn eenheidsmaten voor tijd, plaats, actie en entropie. Het is fundamenteel onmogelijk om deze grootheden nauwkeuriger te meten dan deze Planck maten aangeven. Het is alsof de wereld binnen deze maat niet bestaat of nog anders, dat de natuur over deze gebieden heen stapt. Deze vorm van korreligheid geldt echter niet voor de dingen die we als natuurkundige velden bestempelen.

GPS

Stel nu eens dat we met het driedimensionale imaginaire deel van de quaternionen een driedimensionaal positiebepalingssysteem voor de natuur willen opstellen. Dan zou dit systeem rekening moeten houden met de korreligheid van de lengtemaat. Dit levert echter meteen een groot probleem. Een dicht opeengepakte verzameling korrels levert preferente richtingen op. Zulke richtingen komen in de natuur voor in vaste stoffen maar ze zijn in het heelal niet alom aanwezig. Er moet dus een andere oplossing voor het aangepaste positiebepalingssysteem gevonden worden. Die mag dan voor lokale positie bepaling geen gebruik maken van meerdimensionale verzamelingen van korrels, want dat zou hetzelfde probleem opleveren.

Het betekent niet dat het gezochte systeem systeem om een andere reden dan lokale positiebepaling toch meerdimensionale dicht opeengepakte verzamelingen van korrels mag bevatten. Dit kan bijvoorbeeld wel degelijk passen bij gesloten horizonnen die in dit systeem voor kunnen komen.

Korrelketens

Een mogelijke oplossing vormt een soort positiebepaling die werkt met één-dimensionale ketens van korrels. De ketens vertegenwoordigen hypothetische paden. Zij kunnen vrijelijk in de 3D ruimte bewegen. Er is één korrel in de keten die de momentele positie op het pad aangeeft. Alleen de directe omgeving van deze korrel komt overeen met een actueel pad. Nu rest nog het probleem om aan de korrels in de keten een positie toe te kennen.

Koppeling met een continuüm

Naast de Hilbertruimte met aftelbare dimensie hebben de wiskundigen een zogenaamd Gelfand triple ontwikkeld, waarvan twee buitenste delen als in een soort sandwich om de Hilbertruimte heen zitten. Omdat dit triple direct aan de

Hilbertruimte gekoppeld is, wordt voor deze sandwich ook wel de naam “rigged Hilbert space” gebruikt. Dat is eigenlijk onterecht want het triple is helemaal geen Hilbertruimte. Het is een soort sandwich waarin de oorspronkelijke Hilbertruimte het binnenste deel vormt. Ter onderscheid noemen we de oorspronkelijke Hilbertruimte een separabele Hilbertruimte. De rigged Hilbert space bezit gelukkig wel een overaftelbaar aantal dimensies en kan daardoor juist wel een GPS-systeem leveren dat als continuüm achtergrond coördinaatsysteem kan fungeren. De korrelketens hebben natuurlijk ook een ekwivalent in de rigged Hilbert space en daardoor kan aan elk van de korrels een positie in het achtergrond coördinaatsysteem gehecht worden.

Ankerpunten

De korrels die in de ketens de huidige positie in het “pad” aangeven zijn in feite ankerpunten van elementaire deeltjes. De ankerpunten zijn elk verbonden met een eigenvector van de positieoperator die in de separabele Hilbertruimte thuishoort en de positie van het betreffende elementaire deeltje vertegenwoordigt.

Het ankerpunt kan zich per tijdstap **hoogstens** één stap in de keten verplaatsen en komt dan in de volgende korrel van de keten terecht. De verhouding tussen plaats-stap en tijdstap ligt vast en is gelijk aan c, dit getal is de snelheid van een vrij bewegend lichtdeeltje. Een foton is een vrij bewegend lichtdeeltje en neemt in elke tijdstap dus steevast een plaats-stap. Het betekent dus ook dat geen enkel deeltje sneller kan gaan dan een dergelijk vrij bewegend lichtdeeltje.

Velden

De ketens kunnen niet willekeurig bewegen. Er is iets dat zorgt dat de keten in elk geval zijn vloeiende vorm behoudt. Dit wordt verzorgd door een waarschijnlijkheidsdichtheidsverdeling die met het ankerpunt verbonden is en die de verbinding legt met het continuüm achtergrond coördinaatsysteem in de rigged Hilbert space.

In feite gebruiken we een hyper-complexe functie waarvan het kwadraat van de modulus gelijk is aan de waarde van de genoemde waarschijnlijkheidsdichtheidsverdeling. Deze hyper-complexe functie heeft quaternionen als functiewaarde en accepteert quaternionen als parameter. Het is een waarschijnlijkheidsamplitudeverdeling. Deze kan gesplitst worden in een ladingsdichtheidsverdeling en een stroomdichtheidsverdeling. Wat met deze lading bedoeld wordt laten we voorlopig nog even in het midden.

Het driedimensionale imaginaire deel van een parameterwaarde kan een positie aangeven. De waarschijnlijkheidsverdeling geeft de kans aan dat de volgende korrel op de door de parameter aangeven plaats ligt.

Ons normale tijdsbegrip registreert de tijd van de waarnemer en niet de tijd van het waargenomen object. Ons normale tijdsbegrip past dus niet in het reëele deel van het quaternion.

De vorm van de waarschijnlijkheids-verdeling zorgt ervoor dat slechts minimale veranderingen optreden. De hyper-complexe functie vormt een veld. Dit is het veld dat bij de beschouwde keten hoort. Het reële deel van de positie parameter wordt in deze redenering niet gebruikt[3].

De waarschijnlijkheidsverdeling kent een grondtoestand. Alle versies van deze waarschijnlijkheidsverdelingen hebben dezelfde grondtoestand. De eerder genoemde korrels zijn in feite de grondtoestanden van de waarschijnlijkheidsverdelingen. De waarschijnlijkheidsverdeling zelf kan worden gezien als de weergave van de stochastische onnauwkeurigheid tussen de positiewaarde van de korrel en de daarmee overeenkomende positie in het achtergrond coördinatensysteem. De operator in de separabele Hilbertruimte, welke de positie van de elementaire deeltjes bepaalt en de GPS operator in de rigged Hilbertruimte zijn dus op onnauwkeurige en door waarschijnlijkheid bepaalde wijze aan elkaar gekoppeld.

Privévelden

Een elementair deeltje kan een of meer ankerpunten bezitten. De hyper-complexe functies die op deze wijze bij een elementair deeltje horen vormen het privéveld van dat deeltje. Dit privéveld komt overeen met wat gebruikelijk de golffunctie van het deeltje genoemd wordt. Met behulp van de golffunctie worden door kwantummechanicageleerden de gedragingen en de eigenschappen van elementaire deeltjes beschreven.

Samen vormen alle privévelden van deeltjes een alles-overdekkend veld. Dit gezamenlijke veld is onderdeel van de natuurkundige velden die in onze omgeving voorkomen.

[3] De Hilbertruimte kan geen dynamiek vertegenwoordigen. Het Hilbert boek model kan dat wel.

Veldentheorie

In het volgende speelt het begrip Fourier transformatie een belangrijke rol. Deze wiskundige bewerking zet een functie of veld om in een volledig ander aanzicht. Daarbij gaat de parameterruimte over van de gebruikelijke configuratieruimte in een frequentieruimte. Het deeltjesgerichte aanzicht transformeert daarbij in een golfgericht aanzicht.

Volgens de veldentheorie kan elk statisch veld gesplitst worden in een rotatievrij (longitudinaal) deel en een divergentievrij (transversaal) deel. In het ideale geval loopt deze splitsing in de Fourier-ruimte langs rechte radiale lijnen. Vandaar de naam longitudinaal en transversaal. In de praktijk blijkt dit ideaal niet op te gaan en zijn de radiale lijnen afhankelijk van de samenstelling van het veld op verschillende plaatsen verschillend gericht. Dit definieert in de oorspronkelijke coördinaten een lokale kromming. De krommingswaarde kan benut worden om een nieuw veld te definiëren dat op de beschreven wijze afgeleid is van het alles overdekkende veld. Dat veld kunnen we krommingsveld noemen. Het heeft alle aspecten van het zwaarteveld. We kunnen het deel van het krommingsveld dat door een deeltje veroorzaakt wordt afzonderen en als privé krommingsveld bestempelen. Uit dat krommingsveld laat zich dan de massa van het deeltje afleiden. Het gevolg van de kromming is dat paden die recht zouden moeten zijn nu gekromd zijn en dat dingen die een vaste vorm zouden moeten hebben, nu een van de positie afhankelijke vorm tonen. Gewoonlijk passen de natuurkundigen deze relatie in omgekeerde volgorde toe.

Het veldmodel

Het veldmodel dat hier neergezet wordt, verschilt wezenlijk van het gangbare veldmodel. Gebruikelijk wordt ervan uitgegaan dat de elektromagnetische velden en het zwaarteveld onafhankelijk van elkaar zijn en dat het zwaarteveld een kromming in het coördinatensysteem veroorzaakt waarmee in de behandeling van de elektromagnetische velden rekening gehouden moet worden.

In dit nieuwe model wordt de oorzaak van de kromming neergelegd in de eigenschappen en de configuratie van de samenvoeging van alle velden behalve het zwaarteveld. Daar horen ook de velden bij die overeenkomen met de golffuncties van deeltjes. De golffunctie kan worden gezien als het privé veld van het beschouwde deeltje. Vervolgens wordt het krommingsveld uit de kromming afgeleid. Met andere woorden, in dit nieuwe model is het zwaarteveld een afgeleid veld. Deze benadering veroorzaakt onmiddellijk een unificatie van de veldtheorieën.

Generatie en annihilatie

De korrelketens kunnen splitsen en samengaan. Dat gebeurt dan gedurende de overstap naar een volgende statische toestand. De procedure wordt gecontroleerd door de omgevende velden.

Hilbertsandwich

De Hilbertruimte zelf heeft geen plaats voor velden. Elk privé veld omvat de hele Hilbertruimte. Op de hierboven beschreven wijze is het echter mogelijk om het eerder genoemde sandwich uit te breiden met extra lagen, welke de velden vertegenwoordigen. De eerste twee extra lagen worden gevormd door de decompositiedelen van het alles overdekkende veld. Het krommingsveld vormt nog een extra dek daarbovenop. Al bij al heeft de Hilbertsandwich dus zes lagen.

Hilbertboek

Deze combinatie kan nog steeds geen dynamiek weergeven. Elke sandwich beschrijft een statische toestand. Tijd als progressieaanduiding is dan ook geen grootheid die als eigenwaarde van een operator in de Hilbertsandwich past. Het is hoogstens een parameter die de hele Hilbertsandwich karakteriseert. Deze situatie kan benut worden door een hele reeks van deze Hilbertsandwiches achter elkaar te zetten. Op deze wijze wordt een Hilbertboek gevormd, waarin elke pagina een Hilbertsandwich is. Elke pagina geeft een nieuwe statische toestand weer. De velden zorgen voor de samenhang tussen de pagina's. Bladeren door dit boek geeft dan een beeld van de dynamiek van de natuur in ons heelal.

Ander aanzicht

Het lijkt misschien dat de pagina's van het Hilbert boek onafhankelijk zijn. Dat is echter niet zo. Elke pagina bevat de voorwaarden die de inhoud van de volgende pagina bepalen. De eerste voorwaarde is het feit dat de velden zowel een ladingsdichtheid als een stroomdichtheid bevatten. Door deze combinatie is de volgende veldconfiguratie grotendeels bepaald. Het biedt ook de mogelijkheid om deze ingrediënten in een continuïteitsvergelijking te gebruiken. Ook biedt Fourier analyse extra informatie door de gegevens in een ander aanzicht the presenteren. Het coördinatensysteem gaat daarbij over in een geassocieerd coördinatensysteem. Daarbij wordt de functie van positie vervangen door de functie van frequentie. In vaktaal heet dit tweede coördinaatsysteem de canoniek geconjugeerde van het eerste coördinaatsysteem. Het oorspronkelijke aanzicht geeft een goed beeld van het deeltjesgedrag en stromingsgedrag van het beschouwde onderwerp, terwijl het nieuwe aanzicht een goed beeld geeft van het golfgedrag en transmissiegedrag van datzelfde onderwerp.

Dus ondanks het feit dat een enkele pagina hoogstens een statische toestand weergeeft, ligt in deze gegevens toch de daaropvolgende toestand besloten.

Tekenkeuzes

Quaternionische velden bieden twee onafhankelijke tekenkeuzes, beide tekenkeuzes veranderen de rechts/linksdraaiing van het uitwendige vectorproduct van de quaternionwaarden. De eerste tekenkeuze $\psi\Rightarrow\psi^{1}$ verandert het teken van één van de imaginaire basisvectoren van de quaternionwaarden. De tweede tekenkeuze $\psi\Rightarrow\psi^{*}$ verandert het teken van alle drie imaginaire basisvectoren van de quaternionwaarden. Samen produceren de twee tekenkeuzes vier verschillende versies van quaternionische velden, welke allen op hetzelfde basisveld berusten. Om een basisveld aan te wijzen gebruiken we de tekenkeuze van het coördinatensysteem, waarvan de waarden gebruikt worden als veldparameter. De veldversie die wat tekenkeuze met het coördinatensysteem overeenkomt is isotroop. De veldversie waarbij ten opzichte van dit veld drie basisvectoren van teken veranderen is ook isotroop. De beide andere versies zijn richtingsafhankelijk.

Elementaire deeltjes

Het blijkt dat elementaire deeltjes gekenmerkt worden door een geordend paar veldversies van hetzelfde basisveld. Voor het type van het elementair deeltje zijn alleen de versiekeuzes van belang. Het basisveld zelf is bepalend voor de grootte van de factor m, waarmee de twee versies met elkaar gekoppeld zijn. Wanneer de getransporteerde versie van het veld isotroop is en de koppelingsfactor is ongelijk aan nul, dan is het deeltje een fermion, anders is het een boson.

De bewegingsvergelijking van een vrij bewegende kwant is in feite een uitgeklede continuïteitsvergelijking. De bronterm bevat de versie van het veld, die met de getransporteerde versie van het veld gekoppeld is. De algemene versie van deze bewegingsvergelijking is:

$$\nabla \psi^x = m\, \psi^y$$

De rechterzijde bevat de bronterm. De quaternionische nabla operator is hierbij de transporteur. ψ^x is de getransporteerde quaternionische veld versie. ψ^y is de gekoppelde quaternionische veld versie en m is de koppelingsfactor.

Het geordende paar $\{\psi^x, \psi^y\}$ kenmerkt het type van de kwant.

Het antideeltje wordt gevormd door het paar $\{\psi^{x*}, \psi^{y*}\}$ en gehoorzaamt de bewegingsvergelijking:

$$\nabla^* \psi^{x*} = m\, \psi^{y*}$$

Uit de bewegingsvergelijking laat zich een formule voor de berekening van de koppelingsfactor m afleiden:

$$\int_V (\psi^{y*} \nabla \psi^x)\, dV = m \int_V (\psi^{y*} \psi^y)\, dV = m \int_V |\psi^y|^2\, dV = mg$$

De factor g is reëel en positief.

Het aantal imaginaire basisvectoren dat in het paar van teken wisselt terwijl de rechts/linkse draairichting veranderd bepaalt de elektrische lading van het betreffende deeltje. Op deze wijze ontstaan deeltjes met een elektrische lading van $\pm e$, $\pm$ ⅔ e, $\pm$ ⅓ e of 0. De anisotrope veldversies leveren vervolgens nog een kleurlading die aangeeft welke richting overheerst.

Behalve voor deeltjes waarvoor de koppelingsterm nul is worden op deze wijze bewegingsvergelijkingen gegeven voor alle bekende elementaire deeltjes van het standaard model. Er blijven zelfs plaatsen over voor deeltjes die nog niet gevonden zijn.

Discussie

Wat hier beschreven wordt, is in feite slechts een vereenvoudigd model. In vergelijking met andere modellen verschilt het door het strikte vasthouden aan de relatie met de onderliggende kwantumlogica. Het model is hoogstens een eenvoudige afspiegeling van de werkelijkheid. De gebeurtenissen die we in de kosmos zien worden grotendeels door het krommingsveld bepaald.

De nieuwe positieoperator kent een buitenhorizon waarbuiten geen ketens voorkomen. Hij kent ook interne horizons waarbinnen geen ketens bestaan. Deze interne horizons kennen we als de buitenkant van zwarte gaten. De horizon bestaat uit een dicht opeen gepakte verzameling korrels. De maat van deze korrels wordt bepaald door de Planck lengte. Elke korrel representeert een eigenvector van de nieuwe positie operator. Dit is een Hilbert vector die op zijn beurt een kwantumlogische propositie vertegenwoordigt. Deze heeft een binaire waarde die ja of nee kan zijn en het lidmaatschap van de groep van eigenvectoren van de positieoperator aangeeft.

Positie en vooruitgang zijn niet twee onderdelen van een samenhangende ruimtetijd grootheid zoals wel eens gesuggereerd wordt. Deze grootheden krijgen pas een relatie wanneer het bijpassende object beweegt.

Dit model van de fundamenten van de natuurkunde bevat minder tegenstrijdigheden dan het gebruikelijk gehanteerde model. Het model verandert de fundamenten, maar heeft geen gevolgen voor het gebouw. Alle bewegingsvergelijkingen behouden dezelfde vorm en dezelfde betekenis.

Referenties

Over scheurtjes in het huidige fundament: http://www.crypts-of-physics.eu/Cracksofphysics.pdf .

De details van het model worden verder uitgewerkt in http://www.crypts-of-physics.eu/OntheoriginofdynamicsBoek2.pdf

Over het strandmodel: http://www.motionmountain.net/research.html

In dit boek van Christoph Schiller wordt aan de ketens de naam **strand** (touwtje) gegeven. Let op, touwtjes zijn geen snaren! Zowel het Hilbertboekmodel als het touwtjesmodel heeft weinig met snaartheorie te maken.