Getallen

De meest simpele getallen zijn de binaire getallen. In hun meest eenvoudige vorm vormen zij het paar 0 en 1. Deze kunnen worden uitgebreid tot een meertallig stelsel. Zo schrijf je het (normale) aantal vingers aan een hand op als 101 en het dubbele als 1010. Een ander getallenstelsel wordt gevormd door de natuurlijke getallen. Die gebruik je normaal bij het tellen. In feite tel je in de decimale weergave van deze getallen, want eenvoudige elektronische rekenapparaten rekenen binair en geven het resultaat decimaal weer. Toevoeging van de nul levert de positieve getallen. Het heeft lang geduurd eer de mens in de gaten kreeg dat dit een zinvolle toevoeging is. De toevoeging van de negatieve getallen duurde nog langer en levert de gehele getallen op. Daarna kwamen de breuken. De breuken zijn speciaal omdat je door moet hebben dat de breuken eigenlijk equivalentieklassen zijn. Er blijken evenveel breuken te bestaan als er natuurlijke getallen zijn. Dat is inderdaad oneindig veel, maar het is aftelbaar oneindig. Als we bij alle rijen van breuken die convergeren naar een bepaald iets, dat iets toevoegen, dan ontstaan de reële getallen. Die verzameling is niet langer aftelbaar. Er bestaan dus verschillende vormen van oneindigheid. Cantor heeft dat helemaal uitgezocht en netjes gerubriceerd. Een verzameling van identieke verzamelingen, welke oneindig veel elementen bevatten heeft een groter kardinaalgetal dan het kardinaalgetal van zijn elementen. Samen met nul en de natuurlijke getallen ontstaat op deze wijze een geordende rij van kardinaalgetallen.

De wortels van positieve reële getallen zijn ook weer reëel. Maar de wortels van negatieve getallen passen daar niet in. Om die een plaats te geven is een extra dimensie nodig. We geven de wortel uit -1 een nieuwe naam i en schrijven de wortel uit het negatieve getal als het product van i en de wortel van het overeenkomstige positieve getal. Deze nieuwe combinatie noemen we imaginaire getallen. We zetten in een plat vlak de positieve getallen langs de reële as en loodrecht daarop een as met imaginaire getallen en noemen dat de imaginaire as. De rest van het vlak wordt ingenomen door getallen die deels reëel en deels imaginair zijn. Alle getallen in het vlak vormen tezamen de complexe getallen.

De stap naar een hogere dimensie is interessant. Er is daarom lang gezocht naar een getallenstelsel dat drie dimensionaal is. Na lang zoeken vond Hamilton een vier dimensionaal getallenstelsel. Hij noemde ze de kwaternionen. Zijn assistent vond kort daarna een acht dimensionaal getallen stelsel. Cayley ging echter met de eer strijken. Daarom worden deze getallen ook wel Cayley getallen genoemd. Ze staan ook bekend als octonionen. Er bestaan verschillende constructie methodieken om van een 2^n dimensionaal getallenstelsel een 2^{n+1} dimensionaal getallenstelsel te vormen. De meest bekende methodiek is de Cayley-Dickson constructie. Voorbij de octonionen levert dit wat minder nette getallen op. Smith claimt dat met zijn 2^n-on constructie voor n>3 veel nettere getallen ontstaan. De 2^n-onen zijn in de onderste m coördinaten gelijkwaardig aan 2^m-onen. Tot in negen dimensies behouden de 2^n-onen veel van hun getal eigenschappen. Smith noemt ze “niners”. Het 2^n-on veld bevat een aanzienlijk aantal deelruimten welke op zich 2^m-on velden zijn (m<n).
Om analyses te doen vormen de complexe getallen de kampioenen. De quaternionen zijn daarvoor minder geschikt, maar zij bevatten zoals gezegd een aantal complexe deelruimten. Bovendien is hun product in het algemeen niet commutatief (ab≠ba). Dat brengt een interessant gedrag voor de getallenwals (c=ab/a) met zich mee. Het product van de octonionen is in het algemeen niet associatief. (a•bc≠ab•c).

De 2^n-onen kennen n onafhankelijke imaginaire basisgetallen en n tekenkeuzes. De reële getallen hebben er geen. De complexe getallen bieden een keuze in het teken van de reële as. De hogere 2^n-onen erven dit. De kwaternionen bieden de keuze tussen een links of rechtsdraaiend uitwendig vectorproduct. De octonionen biedt dit voor uitwendige producten met het extra basisgetal. Dit geldt voor alle hogere 2^n-onen.
Samen met de getallenwals levert dit een functionaliteit die ook door spinors vertegenwoordigd wordt.

De natuur maakt graag gebruik van deze merkwaardige eigenschappen van getallen. Veel van de eigenaardige natuurverschijnselen, zoals spin zijn terug te voeren op deze rariteiten.

De hypercomplexe getallen hebben sinds de invoering van de vectoranalyse door Gibbs de interesse van wiskundigen en natuurkundigen verloren. Natuurkundigen rekenen niet graag met de hoger dimensionale getallen. Zij blijven liever hangen bij complexe getallen en proberen de merkwaardige eigenschappen van de hoger dimensionale getallen met andere middelen te vatten. Dat zijn afgeleide algebra's, zoals de Clifford algebra, de Jordan algebra en de Grassmann algebra. Bovendien lijkt de natuurkunde zich niet af te spelen in een Euclidische metriek, maar in een Minkowski of Lorentz metriek. Dit is echter ook weer de schuld van de 2^n-onen en in het bijzonder van de nummerwals. Deze verstoort onze waarneming van wat er om ons heen gebeurt en heeft de natuurkundigen aanleiding gegeven om met de coördinaattijd in plaats van met de echte tijd te werken. Deze keuze leidt tot het bestaan van een maximale snelheid van informatieoverdracht. Deze staat beter bekend als de lichtsnelheid.